**Лабораторная работа № 5**

**Бифуркационная динамика систем.**

***Разделы программы***: Новые направления науки о самоорганизации.

**Теоретическая часть.**

Полученные еще в девятнадцатом веке А.Пуанкаре результаты анализа решений некоторых дифференциальных уравнений (т.н. бифуркация решений), в дальнейшем развитые А.Андроновым в области теории нелинейных колебаний, нашли применение в науке о самоорганизации. Основополагающей работой в этом направлении стала работа А.Тьюринга «О химической основе морфогенеза», в которой было показано, что при определенных условиях взаимодействие химической реакции и чисто физического процесса диффузии приводит к возникновению стационарной пространственной неоднородности концентраций вещества, т.е. структуры. Выводы Тьюринга в дальнейшем были подтверждены в биологических экспериментах. Впоследствии оказалось, что круг явлений, описываемых в рамках подхода Тьюринга, оказался очень широк: кроме биологических процессов сюда вошли некоторые химические, экологические процессы, а также процессы, относящиеся к гидродинамике, физике плазмы и т.д. В настоящее время теория бифуркаций вышла далеко за рамки естествознания и применяется в исторической науке, педагогике, медицине и других областях.

Ход работы.

1. Уясните модельную ситуацию, предложенную отечественным исследователем Л.Кадановым.

Пусть на изолированном острове летом выводятся насекомые численностью Хi , которые откладывают яйца и умирают. Из яиц на следующий год выводятся новые насекомые численностью Хi +1 . Очевидно, численность потомства Хi +1  должна зависеть от численности родительского поколения Хi и от каких-то дополнительных факторов. Эта зависимость учитывается уравнением:

Хi +1 =  (N - Хi ),

Где > 0 – некоторый параметр (т.е. постоянная в условиях рассмотрения величина), N – максимально возможная численность популяции.

Для унификации уравнения численность популяции нормируют по отношению к предельной величине , что математически оформляется делением обеих частей равенства на N2:

Хi +1\* = \* Хi\*(1 - Хi\*),

Где Хi\* = Хi/N Хi +1\*= Хi +1/ N \*= N (в дальнейшем изложении \* будем опускать).

1. Проанализируйте унифицированное уравнение. Оно решается путем подстановки значений Хi  (0≤ Хi  ≤ 1) с дальнейшим расчетом Хi +1, которое вновь считается исходным Хi и т.д. (рекуррентный расчет). Однако результаты будут существенно зависеть от , называемого также параметром скорости роста.

Так, для небольших  (0 <<1) выполняется Хi , независимо от начального значения Х0. Убедитесь в этом, задав Х0 и в соответствие с вышеуказанными интервалами. Результаты расчетов отразите в табл. 1., указав сверху нее значение .

= \_\_\_\_\_\_\_\_\_

Табл.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Х0 | Х1 | Х2 | Х3 | Х4 | Х5 | Х6 | Х7 | Х8 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Анализ табличных результатов показывает, что популяция\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

1. Продолжите анализ унифицированного уравнения, задав большее, а именно

(1 <<3). Результаты расчетов отобразите в табл.2, оформив ее по аналогии с табл.1.

Как видно, в данном случае популяция \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, а стремится по численности к некоторому предельному значению Х\*. Этот предел для каждого может быть рассчитан аналитическим путем решения уравнения:

Хi\* =  Х\*(1 - Х\*)

Уравнение имеет два решения:

Х\*1= 0 Х\*2 = (- 1)/ 

Первое решение реализуется (т.е. существует устойчиво) при малых  (0 <<1), а второе для >1, т.к. условиям задачи по должно быть Хi>0. Для Х\*2, очевидно, характерен годичный цикл численности.

1. Задайте еще большее значение (3 <<3,4) и рассчитайте динамику популяции. Результаты расчета отобразите в табл.3, аналогичной по форме табл.1. Как можно увидеть в этом случае динамика численности популяции заметно усложняется: возникают два ее предельных (стационарных) значения, причем сама численность колеблется, попеременно приближаясь то к одному, то к другому пределу. В итоге будет наблюдаться ритмичность колебаний численности с периодом 2 года.
2. Т.о. характер решения унифицированного уравнения численности популяции существенно зависит от величины параметра , входящего в уравнение. Для «малых»  стационарное значение равно 0, для «средних»  - оно ненулевое, для «больших»  возникают два стационарных состояния. Последняя ситуация и называется бифуркацией (разветвлением) решения (и, соответственно, динамического поведения системы). В нашем случае она возникает, когда параметр  достигает первого критического значения 1=3. Строго говоря, первая точка бифуркации соответствует

0= 1. Однако из двух значений Х\* одно (Х\*1 = 0) становится неустойчивым и не реализуется.

1. Построить график зависимости стационарных состояний численности от параметра скорости роста (Х = f (), = (0-3,57)).

Можно показать, что второе критическое значение 2 = 3.4 соответствует раздвоению каждой из ветвей решения, т. е. стационарных значений становится не два, а четыре. При этом возникает четырехстадийный цикл колебаний численности, т.е. четырехлетняя периодичность. Следующее критическое значение 3 = 3,54 приводит к восьмистадийному циклу, затем появляются 16, 32, 64 и т.д. ветвей. Соответствующие критические значения очень мало отличаются друг от друга. Наконец, при = 3,57 периодичность изменения численности исчезает (ветви решений сливаются , а период повторения можно условно считать бесконечным). Наступает хаотизация динамики (т. е. динамический или детерминированный хаос).

Рассмотренная математическая модель является далеко не единственной, которая приводит к каскаду бифуркаций удвоения периода при изменении некоторого параметра, входящего в уравнение. В самом общем случае такая задача была впервые исследована М.Фейгенбаумом в 1978 г. Разработанную им теорию называют теорией универсальности Фейгенбаума. Полученные в ней закономерности оказались общими для широкого класса гидродинамических, механических, электрических, биологических и других систем.

Теория бифуркаций позволяет раскрыть важные закономерности динамического поведения систем различной природы, в том числе – переход от упорядоченного поведения к хаотическому и обратно.

Контрольные вопросы:

* Какие биологические обоснования можно привести для введения величины N в исходное уравнение? Ответ поясните.
* Какова динамика популяции при Х0 = 0 ? при Х0 = N?